Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 11-13

IRRATIONALITÉ DE $\zeta 2$ ET $\zeta 3$

par

Roger APÉRY

-:-:-:-

Notre méthode de démonstration de l'irrationalité d'un réel α défini par les sommes partielles u_n d'une série de rationnels, comporte les étapes suivantes :

1. Remplacer la suite $u_n = u_{n,n}$ par une suite de rationnels à deux indices $u_{k,n}$ avec $0 \leq k \leq n$ telle que pour chaque k la suite $u_{k,n}$ converge plus rapidement vers α que la suite $u_{k-1,n}$.

2. Poser $u_{k,n} = \dfrac{t_{k,n}}{\binom{n+k}{k}}$.

3. Majorer, en fonction de n exclusivement, le dénominateur de $t_{k,n}$ c'est-à dire montrer qu'il existe une suite d'entiers p_n tels que $p_n\, t_{k,n}$ soit entier et que $p_n \leq \mu^{n+\varepsilon}$.

4. Effectuer une même combinaison linéaire (dépendant de n) à cœfficients entiers positifs sur la colonne n du tableau des $t_{k,n}$ et du tableau des $\binom{n+k}{n}$.

5. On obtient ainsi une suite $\dfrac{v_n}{u_n}$ de fractions de numérateur rationnel et de dénominateur entier. On détermine la limite commune λ de $\sqrt[n]{v_n}$ et de $\sqrt[n]{u_n}$.

6. Si on a de la chance, $\lambda > \mu$: on peut conclure l'irrationalité. On peut aussi déduire une mesure d'irrationalité : quels que soient les entiers p,q,

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{q^{\gamma+\varepsilon}}$$

avec $\qquad \gamma = \dfrac{2 \log \lambda}{\log \lambda - \log \mu}$

Pour la construction des $u_{n,k}$, nous utilisons le développement suivant : étant donnée une suite de réels $a_1, a_2 \ldots a_k$, toute fonction analytique $f(x)$ par rapport à la variable $\frac{1}{x}$ qui tend vers 0 avec $\frac{1}{x}$ admet un développement (unique) de la forme

$$f(x) \equiv \sum_{k \geq 1} \frac{C_k}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k)}$$

(Nous écrivons $\equiv$ au lieu de $=$ pour tenir compte des répugnances des mathématiciens qui considèrent avec Abel, Cauchy et d'Alembert les séries divergentes comme une invention du diable ; en fait, nous n'utilisons jamais qu'une somme finie de termes, mais le nombre de termes croît avec x).

Pour étudier $\zeta 2$, nous posons :

$$\frac{1}{n^2} \equiv \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \ldots \frac{(-1)^{k-1}\ k!}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k-1)} + \ldots$$

$t_{k,n}$ appartient au module

$$\mathbb{Z}(1, \tfrac{1}{4}, \ldots \tfrac{1}{n^2}) \quad \text{additive group}$$

D'après un résultat classique sur le p.p.c.m. des n premiers entiers, μ est égal à e^2.

La suite u_n s'écrit $(1, 3, 19, 147, 1251, 11253, \ldots)$
La suite v_n s'écrit $(0, 5, \frac{125}{4}, \ldots)$
Elles vérifient la récurrence

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (11n^2+11n+3)u_n - (n-1)^2 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

L'irrationalité de $\zeta 2 = \frac{\pi^2}{6}$ est connue depuis Euler, mais notre méthode donne une mesure d'irrationalité de π^2.

Pour étudier $\zeta 3$, nous posons :

$$\frac{1}{n^3} \equiv \frac{1}{n(n^2-1)} - \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} + \ldots + \frac{(-1)^k\ (k!)^2}{n(n^2-1)\ldots(n^2-(k+1)^2)} + \ldots$$

L'utilisation de la diagonale $u_{n,n}$ donne la série

$$\zeta 3 = \frac{5}{2} \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}$$

qui à défaut de prouver immédiatement l'irrationalité de $\zeta 3$ converge mieux que $\sum_n \frac{1}{n^3}$.

2. $t_{k,n}$ appartient au module

$$\mathbb{Z}\left(1, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{n^3}, \ldots\right)$$

μ est égal à e^3.

La suite u_n s'écrit $(1, 5, 73, 1445, 33001, \ldots)$

La suite v_n s'écrit $\left(0, 6, \frac{351}{4}, \frac{62531}{36}, \ldots\right)$

Les deux suites vérifient la relation de récurrence

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3+51n^2+27n+5)u_n + n^3 u_{n-1} = 0$$

$$\lambda = 17-12\sqrt{2}$$

Roger APERY
Département de Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX